

Loi de Weyl presque sûre pour un système différentiel en dimension 1

William Bordeaux Montrieux

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz

Ecole Polytechnique

FR 91120 Palaiseau cedex

bordeaux@math.polytechnique.fr

Résumé

Nous considérons une classe assez générale de systèmes différentiels sur le cercle avec une perturbation aléatoire d'ordre inférieur. Nous adoptons deux points de vue, semiclassique et haute fréquence. Nous montrons (a) que dans la limite $h \rightarrow 0$, les valeurs propres se distribuent selon une loi de Weyl avec une probabilité très proche de 1, (b) que les grandes valeurs propres se distribuent *presque sûrement* selon une loi de Weyl.

Abstract

We consider quite general differential operators on the circle with a small random lower order perturbation. We embrace two points a view, the semiclassical and the high energy limits. We show (a) in the semiclassical limit, that the eigenvalues inside a subdomain of the pseudospectrum are distributed according to a Weyl law with a probability close to 1, (b) that the large eigenvalues obey a Weyl law *almost surely*.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Enoncé des résultats	3

3	Quasimodes	10
4	Problème de Grushin pour l'opérateur non-perturbé	14
5	Problème de Grushin pour l'opérateur perturbé	18
6	Propriétés d'holomorphie de E_{-+}	20
7	Estimation de la probabilité que $\det E_{-+}^\delta$ soit petit	24
8	Preuve du Théorème 2.6	27
9	Réduction semiclassique	32
10	Preuve du Théorème 2.8	33

1 Introduction

Les constructions de quasimode de E.B. Davies [3], M. Zworski [21] et d'autres [5, 15] impliquent que les opérateurs h -pseudodifférentiels non-auto-adjoints ont, en général, la norme de la résolvante qui est très grande lorsque le paramètre spectral z se déplace à l'intérieur de l'image du symbole principal. Dit autrement, le spectre est très instable sous petites perturbations. Une question naturelle est de comprendre comment les valeurs propres bougent quand l'opérateur est perturbé.

Dans [11], M. Hager considère certaines classes d'opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques P sur \mathbb{R} , incluant les opérateurs différentiels, et des petites perturbations aléatoires multiplicatives δQ_ω , où δ est un petit paramètre. Soit un domaine $\Gamma \subset \subset \mathbb{C}$ avec une frontière lisse, on suppose que $p^{-1}(z)$ est une collection finie de points pour z dans Γ et pour lequel $\{p, \bar{p}\}(\rho) \neq 0$ si $\rho \in p^{-1}(\Gamma)$. Sous des hypothèses additionnelles, Hager a montré qu'avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $h \rightarrow 0$, pour $\delta = e^{-\epsilon/h}$, les valeurs propres de l'opérateur perturbé se distribuent selon une Loi de Weyl dans Γ , ce qui était déjà bien connu dans le cas autoadjoint,

$$|\#(\sigma(P + \delta Q_\omega) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \text{vol}(p^{-1}(\Gamma))| \leq \frac{C\sqrt{\epsilon}}{h} \quad h \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

La démonstration de ce résultat repose sur la construction d'un problème de Grushin pour P grâce à la non-annulation du crochet de Poisson $\{p, \bar{p}\}$. Elle montre ensuite que le problème reste bien posé pour l'opérateur perturbé,

réduisant alors l'analyse spectrale à l'étude des zéros d'une fonction. Après avoir trouvé une fonction holomorphe avec les mêmes zéros, elle retrouve le volume symplectique en rappelant un théorème de comptage des zéros de fonctions analytique.

Mentionnons que M. Hager, J. Sjöstrand ont étendu ce résultat au cas des opérateurs sur \mathbb{R}^n [12], et que J. Sjöstrand l'a lui étendu au cas des variétés compactes [18].

Dans ce travail, nous allons étudier des systèmes elliptiques d'opérateurs différentiels sur S^1 avec des perturbations aléatoires. En adaptant des techniques d'Hager [11] nous allons d'abord établir une loi de Weyl avec une probabilité proche de 1 dans le cas semiclassique avec des petites perturbations. Ensuite dans le cas non-semiclassique ($h = 1$) nous montrerons que les grandes valeurs propres se distribuent presque sûrement selon la loi de Weyl.

Remerciements. Ce travail fait partie de la thèse préparée sous la direction de J. Sjöstrand. L'auteur tient aussi à remercier M. Zworski pour son accueil et des discussions très utiles lors de son séjour à Berkeley.

2 Enoncé des résultats

Asymptotique semiclassique. Considérons l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P(h) = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha, \quad h \in (0, 1], \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.1)$$

où chaque A_α est une matrice $n \times n$ complexe dépendant de manière C^∞ de x , et admettant la représentation asymptotique dans $C^\infty(S^1)$,

$$A_\alpha(x; h) \sim A_{\alpha,0}(x) + hA_{\alpha,1}(x) + h^2A_{\alpha,2}(x) + \dots, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Le domaine de définition $\mathcal{D}(P)$ choisi pour P est l'espace de Sobolev semiclassique $H_{sc}^m(S^1, \mathbb{C}^n)$ défini par

$$\left\{ u \in L^2(S^1, \mathbb{C}^n); \|u\|_{m,h}^2 = \sum_{\alpha \leq m} \|(hD_x)^\alpha u\|^2 < \infty \right\}. \quad (2.3)$$

Le symbole principal semiclassique de P est donné par

$$p(x, \xi) := \sum_{\alpha \leq m} A_{\alpha,0}(x)\xi^\alpha, \quad (x, \xi) \in T^*S^1. \quad (2.4)$$

Hypothèse 2.1 *On suppose que P est elliptique (au sens où $\det A_{m,0}$ ne s'annule pas).*

Nous notons l'ensemble des valeurs propres du symbole principal p par

$$\Sigma(p) = \bigcup_{(x,\xi) \in T^*S^1} \sigma(p(x,\xi)), \quad \sigma(p(x,\xi)) := \text{spectre de } p(x,\xi). \quad (2.5)$$

Proposition 2.2 *Sous l'hypothèse précédente, pour tous z , $P - z : \mathcal{D}(P) \rightarrow L^2(S^1)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*

Preuve. Il est connu qu'un opérateur elliptique sur une variété compacte (ici S^1) est de Fredholm. Après multiplication par A_m^{-1} , on est ramené au cas où $A_m = I$. Puis, en utilisant l'invariance de l'indice de Fredholm par déformation elliptique, on obtient que l'indice de $P - z$ est égal à celui de $(hD)^m$; les termes de degré inférieur ont été écrasés. Pour finir, il est clair que l'indice de $(hD)^m$ est zéro. \square

En particulier, s'il existe un point z_0 pour lequel la résolvante $(P - z_0)^{-1}$ existe (ce qui est toujours le cas si $\Sigma(p) \neq \mathbb{C}$), alors nous trouvons que le spectre est discret dans \mathbb{C} . En effet, par la théorie de Fredholm analytique, nous savons que pour un opérateur A d'indice zéro, dont le spectre n'est pas égal à \mathbb{C} , alors le spectre consiste en des valeurs propres discrètes.

Pour z fixé, $q_z(x, \xi)$ désigne, dans la suite, le déterminant de $p(x, \xi) - z$. Nous définissons l'ensemble

$$\Phi = \{z \in \Sigma : \exists (x, \xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p(x, \xi)) \text{ et } \{q_z, \bar{q}_z\}(x, \xi) = 0\} \quad (2.6)$$

où $\{\bullet, \bullet\}$ désigne le crochet de Poisson. Σ, Φ sont fermés et $\Lambda(p) := \Sigma \setminus \Phi$ est un ensemble ouvert.

Nous montrerons, dans la proposition 3.3, que l'image réciproque de zéro par q_z pour z donné dans $\Lambda(p)$, est un ensemble de la forme

$$\forall z \in \Lambda(p), \quad q_z^{-1}(0) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z), j = 1, \dots, \beta(z)\} \quad (2.7)$$

où $\beta(z) < \infty$ est localement constant, et

$$\pm \frac{1}{2i} \{q_z, \bar{q}_z\}(\rho_\pm) > 0. \quad (2.8)$$

Ce qui implique que $\forall z \in \Lambda(p)$, $j = 1, \dots, \beta$,

$$\exists e_+^j = e_+^j(x, z; h) \in \mathcal{S}, \quad \|e_+^j\| = 1, \quad \|(P - z)e_+^j\| = \mathcal{O}(h^\infty),$$

e_+^j est une solution BKW concentrée près de ρ_+^j , et

$$\exists e_-^j = e_-^j(x, z; h) \in \mathcal{S}, \quad \|e_-^j\| = 1, \quad \|(P - z)^* e_+^j\| = \mathcal{O}(h^\infty),$$

e_-^j est une solution BKW concentrée près de ρ_-^j .

Hypothèse 2.3 Soit $\Omega \subset\subset \Lambda(p)$ et connexe. On demande que pour tout $z \in \Omega$,

$$\rho_\pm^j(z) = (x^j(z), \xi_\pm^j(z)), \quad x^j \neq x^k, j \neq k. \quad (2.9)$$

Comme $\rho_+^j(z) \neq \rho_+^k(z)$, on a nécessairement $\xi_+^j \neq 0$ ou $\xi_-^j \neq 0$.

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Q_ω est un opérateur différentiel d'ordre inférieur à P de $L^2(S^1)$ dans lui-même, de domaine dense,

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m - 1. \quad (2.10)$$

Ici Q_α est une matrice $n \times n$ où chaque élément est une série de Fourier aléatoire, c'est à dire

$$Q_\alpha^{i,j}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_{\alpha,k}^{i,j} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.11)$$

On adopte l'hypothèse suivante sur les variables aléatoires $q_{\alpha,k}^{i,j}$.

Hypothèse 2.4 Les coefficients de Fourier $q_{\alpha,k}^{i,j}$ sont des variables aléatoires (pour faire court v.a.) complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, (\sigma_{\alpha,k}^{i,j})^2)$. La variance peut dépendre de h . Pour tout i, j , et α

$$\sigma_{\alpha,k}^{i,j} \leq \tilde{C} \langle k \rangle^{-\rho}, \quad (2.12)$$

et pour $\alpha = \alpha_1$, nous avons pour tout i, j

$$\sigma_{\alpha_1,k}^{i,j} \geq \frac{1}{\tilde{C}} \langle k \rangle^{-\rho}, \quad (2.13)$$

où les constantes $\tilde{C} > 0$ et $\rho > 1$ sont indépendantes de α, i, j et k , et où on utilise la notation standard $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle que X suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ complexe d'espérance $m \in \mathbb{C}$ et de variance $\sigma^2 > 0$, si sa densité est

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-m|^2}{\sigma^2}}, & \sigma > 0, \\ \delta(z - m) \text{ (masse de Dirac en } z = m), & \sigma = 0. \end{cases}$$

La propriété remarquable des v.a. gaussiennes est que la somme de deux gaussiennes reste une gaussienne où les espérances et les variances s'additionnent respectivement.

Sous ces conditions, Q_ω est presque sûrement (p.s.) borné comme opérateur de H_{sc}^m dans L^2 . Ce fait découle du résultat suivant concernant la régularité des fonctions $Q_\alpha^{i,j}(x)$:

Proposition 2.5 *Sous l'hypothèse précédente, pour chaque α, i, j , $Q_\alpha^{i,j}(x)$ représente p.s. une fonction continue.*

Preuve. Il suffit de remarquer, grâce à l'inégalité de Markov, que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |q_{\alpha,k}^{i,j}| > t\right) \leq t^{-1} \mathbb{E}(|X|) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{\alpha,k}^{i,j},$$

où X suit une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. On fait ensuite tendre t vers l'infini pour voir que la série aléatoire (2.9) converge normalement presque sûrement, d'où la continuité. \square

Ils existent des résultats très fins concernant la régularité, l'irrégularité des séries de Fourier aléatoires gaussiennes, voir [14].

Nous introduisons, pour $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \subset \mathbb{C}$ donné, le nombre de valeurs propres de $p(x, \xi)$ dans Γ par

$$m_\Gamma(x, \xi) := \#(\sigma(p(x, \xi)) \cap \Gamma). \quad (2.14)$$

Nous nous proposons alors d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.6 *Supposons admis les hypothèses 2.1, 2.3 et 2.4. Soit $\Gamma \subset \subset \Omega$ un ouvert à bord C^2 par morceaux. On entend par C^2 par morceaux, une courbe $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continue, et, C^2 en dehors d'un nombre fini de points a_1, a_2, \dots , et pour lequel l'angle formé par la dérivées à droite et à gauche aux points anguleux a_j est non nul. Soient $\gamma_1 > 0$, $N_0 > 0$. Soit β la valeur constante de $\beta(z)$ sur la composante connexe de $\Lambda(p)$ contenant Ω . Alors il existe une constante positive C telle que pour tout*

$$h^{N_0} < \delta \ll h^{\rho + \gamma_1 + \frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

le spectre de $P - \delta Q_\omega$ est discret, et, le nombre $N(P - \delta Q_\omega, \Gamma)$ de valeurs propres de $P - \delta Q_\omega$ dans Γ satisfait

$$|N(P - \delta Q_\omega, \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint m_\Gamma(x, \xi) dx d\xi| \leq C \frac{\sqrt{h \ln(\frac{1}{h\delta})}}{h},$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C \frac{h^{2\gamma_1}}{\sqrt{\ln(h\delta)^{-1}}}.$$

Notons que lorsque $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, nous nous trouvons dans la situation d'une perturbation multiplicative aléatoire. Nous donnerons au théorème 8.7 une version de la loi de Weyl pour une famille \mathcal{G} de domaine Γ dans Ω .

Asymptotique des grandes valeurs propres. Soit l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad A_\alpha(x) \in C^\infty(S^1). \quad (2.16)$$

Le domaine de définition naturel est l'espace de Sobolev $H^m(S^1, \mathbb{C}^n)$. On impose comme précédemment une hypothèse d'ellipticité

$$\det A_m(x) \neq 0, \quad x \in S^1, \quad (2.17)$$

rendant l'opérateur $P - z$ de Fredholm d'indice zéro pour tout z . En particulier, si $P - z$ est bijectif pour au moins une valeur de z , et nous trouvons donc que le spectre de P est discret. Le symbole principal classique de P est $p_m(x, \xi) := A_m(x) \xi^m$, et nous désignons par $\Sigma(p_m)$ l'ensemble des valeurs propres de p_m , c'est à dire

$$\Sigma(p_m) = \bigcup_{(x, \xi) \in T^*S^1} \sigma(p_m(x, \xi)). \quad (2.18)$$

Notons que si $\Sigma(p_m) \neq \mathbb{C}$, alors pour tous $z \notin \Sigma(p_m)$, $P - z$ est bijectif.

Pour z donné, on écrit $q_{m,z}(x, \xi)$ pour $\det(p_m(x, \xi) - z)$. Nous introduisons ensuite l'ensemble,

$$\Phi = \{z \in \Sigma, \exists (x, \xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p_m(x, \xi)) \text{ et } \{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(x, \xi) = 0\}. \quad (2.19)$$

Nous utilisons la perturbation,

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m-1, \quad (2.20)$$

où chaque Q_α^{ij} est une série de Fourier aléatoire

$$Q_\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_{\alpha,k}^{i,j}(x) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous supposons de plus que les coefficients $q_{\alpha,k}^{i,j}$ vérifient l'hypothèse 2.4. La proposition 2.5 nous dit alors que Q_ω est un opérateur différentiel dont les

monômes sont p.s. continus. De plus, puisque P et $P - Q_w$ ont le même symbole principal, alors p.s. $P - Q_w$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Nous sommes intéressés ici par la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_w$ dans les dilatés de profil conique inclus dans $\Lambda(p_m) := \Sigma \setminus \Phi$ (qui est un cône du fait de l'homogénéité du symbole principal). Choisissons, Ω , un cône ouvert connexe dans $\Lambda(p_m)$.

Pour z fixé dans $\Lambda(p_m)$, l'image réciproque de zéro par $q_{m,z}$ est un ensemble de la forme

$$\forall z \in \Lambda(p_m), \quad q_{m,z}^{-1}(0) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z), j = 1, \dots, \beta(z)\} \quad (2.21)$$

où $\beta(z) < \infty$ est constant sur chaque composante connexe de $\Lambda(p_m)$, et

$$\pm \frac{1}{2i} \{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(\rho_{\pm}) > 0. \quad (2.22)$$

On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.7 *On demande que pour tout $z \in \Omega$,*

$$\rho_{\pm}^j(z) = (x^j(z), \xi_{\pm}^j(z)), \quad x^j \neq x^k, j \neq k. \quad (2.23)$$

Soit θ_1^0 et θ_2^0 tel que

$$\Lambda(p_m) \supset \Omega = \{re^{i\theta}; r > 0, \theta_1^0 < \theta < \theta_2^0\}.$$

Prenons $\theta_1, \theta_2 \in]\theta_1^0, \theta_2^0[$, avec $\theta_1 \leq \theta_2$, et $g, h \in C^2([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}_+)$ satisfaisant $h < g$. Nous introduisons alors l'ensemble

$$\Omega \supset \supset \Gamma_{\theta_1, \theta_2}(h, g) := \{re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, h(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}. \quad (2.24)$$

Pour θ_1, θ_2 fixés on écrira parfois $\Gamma(h, g)$ à la place $\Gamma_{\theta_1, \theta_2}(h, g)$. Nous notons pour tout $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$m_{\Gamma}(x, \xi) := \#(\sigma(p_m(x, \xi)) \cap \Gamma). \quad (2.25)$$

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.8 *Soit Ω un cône connexe dans $\Lambda(p_m)$. On suppose que l'hypothèse d'ellipticité est satisfaite et 2.4, 2.7 sont vérifiées. Si $m - \alpha_1 - \rho - \frac{3}{4} > 0$, alors il existe $\tilde{C} > 0$ et $\tilde{M} \subset \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ tels que le spectre de $P - Q_w$ est discret, et $\forall \omega \in \tilde{M}$ le nombre $N(P - Q_w, \lambda\Gamma(0, g))$ de valeurs propres de $P - Q_w$ dans $\lambda\Gamma(0, g) \subset \subset \Omega$ satisfait*

$\forall \lambda \geq 0$,

$$|N(P - Q_w, \lambda\Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda\Gamma(0, g)}(x, \xi) dx d\xi| \leq C(\omega) + \tilde{C} \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}.$$

Pour le cas $m = 2$, le théorème n'est vérifié que pour des perturbations multiplicatives avec $1 < \rho < \frac{5}{4}$.

Rappel et notations. Précisons au préalable quelques notations, qui nous servirons par la suite. Soit m une fonction sur \mathbb{R} de type $\langle \xi \rangle^\ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . On introduit la classe $S(\Omega, m; \mathbb{C}^{n \times n})$ des symboles matriciels sur Ω

$$\begin{aligned} \{A(x, \xi) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{n \times n}); \forall i, j, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ t.q.} \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta A_{i,j}(x, \xi)| \leq C m(\xi), (x, \xi) \in \Omega\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour des symboles $A(x, \xi; h)$ dépendants de h , nous disons que $A \in S(m)$ si $A(\cdot; h)$ est uniformément bornée dans $S(m)$ quand $h \in (0, 1]$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $S^k(\Omega, m) = h^{-k} S(\Omega, m)$ et $S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap S^k(\Omega, m)$.

Soient $A, A_j \in S(\Omega, m)$ $j \geq 0$. Si $\forall N \in \mathbb{N}$ $A(x; h) - \sum_{k \leq N} A_k(x; h) h^k \in S^{-(N+1)}(\Omega, m)$, On écrira alors $A \sim \sum_{j=0}^\infty A_j h^j$.

Si A et B ont la même représentation asymptotique alors $A - B \in S^{-\infty}(\Omega, m)$.

Si $A_j \in S(m)$, $j \geq 0$ alors il existe $A \in S(m)$ tel que $A \sim \sum A_j h^j$.

Un symbole $A \in S^m$ est dit classique si $A \sim \sum A_j h^j$, les fonctions matricielles A_j étant indépendantes de h . A_0 est dénommé le symbole principal de A . La classe des symboles classiques est notée $S_{cl}(\Omega, m)$.

Proposition 2.9 *L'application bilinéaire*

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^2, m_1) \times S(\mathbb{R}^2, m_2) &\rightarrow S(\mathbb{R}^2, m_1 m_2) \\ (A_1, A_2) &\mapsto A_1 \# A_2 \end{aligned}$$

où

$$A_1 \# A_2 = e^{\frac{i\hbar}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} A_1(x, \xi; h) A_2(y, \eta; h) \big|_{y=x, \eta=\xi} \quad (2.27)$$

est continue. De plus, nous avons la représentation asymptotique

$$(A_1 \# A_2)(x, \xi; h) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hbar}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^k A_1(x, \xi) A_2(y, \eta) \big|_{y=x, \eta=\xi}. \quad (2.28)$$

Grâce à (2.28), il est possible de définir une composition pour les symboles définis sur Ω , $S(\Omega, m_1) \times S(\Omega, m_2) \rightarrow S(\Omega, m_1 m_2) / S^{-\infty}(\Omega, m_1 m_2)$.

Proposition 2.10 Soit $A(x, \xi; h) \in S_{cl}(\Omega, m)$, les trois conditions suivantes sont équivalentes,

- i) A_0 est inversible pour chaque $(x, \xi) \in \Omega$ et vérifie $A_0^{-1} = \mathcal{O}(\frac{1}{m})$.
- ii) A_0 est inversible pour chaque $(x, \xi) \in \Omega$ et vérifie $A_0^{-1} \in S(m^{-1})$.
- iii) $\exists B \in S(m^{-1})$ tel que

$$\begin{aligned} A \# B &\sim 1 \text{ dans } S(\Omega, 1) \\ B \# A &\sim 1 \text{ dans } S(\Omega, 1). \end{aligned}$$

Un symbole qui vérifie i) est dit elliptique (au sens semiclassique).

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$, on associe à $A \in S(m)$ un opérateur pseudodifférentiel A^w continue de $\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ et de $(\mathcal{S}')^n \rightarrow (\mathcal{S}')^n$, défini par

$$A^w u(x) := \frac{1}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} A\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (2.29)$$

Nous avons $A^w = (A_{ij}^w)_{1 \leq i, j \leq n}$. Si $A_i \in S(\mathbb{R}^2, m_i)$ alors nous avons la formule de composition $A_1^w A_2^w = (A_1 \# A_2)^w : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n, (\mathcal{S}')^n \rightarrow (\mathcal{S}')^n$.

Théorème 2.11 Si $A \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, alors $A^w : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ est bornée, et sa norme est majorée par une constante indépendante de h .

Lemme 2.12 Soit $A \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, $A_{ij} \sim \sum_{k \geq 0} h^k A_{ij,k}$, introduisons

$$\text{Supp} A_{ij} := \overline{\bigcup_k \text{supp} A_{ij,k}}.$$

Prenons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, indépendant de h alors

$$\forall i, j, \quad \text{Supp} A_{ij} \cap \text{supp} \chi = \emptyset \Rightarrow \|(A \# \chi)^w\|_{L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Dans le cas scalaire, on pourra aussi consulter [6], [7], et dans le cas matriciel [1], [4].

3 Quasimodes

On se place dans le cadre semiclassique, on étudie l'opérateur différentiel elliptique (Hypothèse 2.1) non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$, défini dans l'introduction.

Si z_0 une valeur propre simple de $p(x_0, \xi_0)$, où $(x_0, \xi_0) \in T^*S^1$, alors il existe un voisinage $U \subset T^*S^1$ de (x_0, ξ_0) et une fonction C^∞ , $\lambda : U \rightarrow \mathbb{C}$, tel que $\lambda(x, \xi)$ soit une valeur propre simple de $p(x, \xi)$ pour $\forall (x, \xi) \in U$, vérifiant $\lambda(x_0, \xi_0) = z_0$.

Proposition 3.1 *Soit z_0 une valeur propre simple de $p(x_0, \xi_0)$, où $(x_0, \xi_0) \in T^*S^1$, alors nous avons l'équivalence*

$$\frac{1}{2i}\{q(\cdot, z_0), \bar{q}(\cdot, z_0)\}(x_0, \xi_0) > 0 \iff \frac{1}{2i}\{\lambda, \bar{\lambda}\}(x_0, \xi_0) > 0.$$

Preuve. $q(x, \xi, z)$ se met sous la forme $g(x, \xi, z)(z - \lambda(x, \xi))$, où $g(x, \xi, z)$ est polynomiale en z et ne s'annule pas au point (x_0, ξ_0, z_0) . Il faut ensuite remarquer que si $a(x, \xi) = b(x, \xi)c(x, \xi)$ et vérifie au point $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$, $a(\rho_0) = c(\rho_0) = 0$ et $b(\rho_0) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{2i}\{a, \bar{a}\}(\rho_0) = |b(\rho_0)|^2 \frac{1}{2i}\{c, \bar{c}\}(\rho_0).$$

□

Proposition 3.2 *Soit $z_0 \in \sigma(p(\rho_0))$,*

(a) si $\dim \mathcal{N}(p(\rho_0) - z_0) \geq 2$ alors

$$\frac{1}{2i}\{q(\cdot, z_0), \bar{q}(\cdot, z_0)\}(\rho_0) = 0.$$

(b) si $\dim \mathcal{N}(p(\rho_0) - z_0) = 1$ alors il existe des matrices r_0, s_0 inversibles telles que $r_0^{-1}(p(\rho_0) - z_0)s_0$ admet 0 comme valeur propre simple.

Preuve. (a) Pour une base convenable de \mathbb{C}^n , les deux première colonnes de la matrice $p(\rho_0) - z_0$ s'annulent. On voit donc que $\det(p(\rho) - z_0) = \mathcal{O}(|\rho - \rho_0|^2)$.

(b) Soit e_1, \dots, e_n une base telle que $(p(\rho_0) - z_0)e_1 = 0$. Soit

$$\begin{aligned} f_2 &= (p(\rho_0) - z_0)e_2 \\ &\vdots \\ f_n &= (p(\rho_0) - z_0)e_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

et f_1 tel que f_1, \dots, f_n soit une base. Alors pour les bases e_1, \dots, e_n , et f_1, \dots, f_n la matrice de $p(\rho_0) - z_0$ devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Il existe donc deux matrices de passage r_0, s_0 pour lesquelles $r_0^{-1}(p(\rho_0) - z_0)s_0$ s'écrit comme dans (3.2). □

Soit z donné dans $\Sigma \setminus \Phi$, l'image réciproque de 0 par q_z^{-1} est donné par

$$q_z^{-1}(0) = \{\rho_+^i(z), \rho_-^j(z); i = 1, \dots, \beta(z), j = 1, \dots, \gamma(z)\} \quad (3.3)$$

avec

$$\pm \frac{1}{2i} \{q(\cdot, z), \bar{q}(\cdot, z)\}(\rho_{\pm}) > 0. \quad (3.4)$$

Proposition 3.3 *a) Pour chaque $z \in \Sigma \setminus \Phi$, nous avons $\beta(z), \gamma(z) < +\infty$.
b) Pour tout $z \in \Sigma \setminus \Phi$, nous avons $\beta(z) = \gamma(z)$.
c) Si z_1, z_2 appartiennent à une même composante connexe de $\Sigma \setminus \Phi$, alors $\beta(z_1) = \beta(z_2)$.*

Preuve. Pour a) et c) c'est clair. z_0 étant fixé, on prend $q(x, \xi) \equiv q(x, \xi, z_0)$. On suppose pour se fixer les idées que $q(0, \xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$: il n'y a donc pas de points ρ_+ ou ρ_- au dessus de 0. Nous coupons le cercle $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, pour identifier, avec l'application $(x, \xi) \mapsto (\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$, le tube $(S^1 \setminus \{0\}) \times \{|\xi| \leq C\}$ à un rectangle K de \mathbb{C} . Concrètement, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \partial K = & \underbrace{\{\xi = -C, x \in [0, 2\pi]\}}_{\gamma_1} \cup \underbrace{\{x = 2\pi, |\xi| \leq C\}}_{\gamma_2} \cup \underbrace{\{\xi = C, x \in [0, 2\pi]\}}_{\gamma_3} \\ & \cup \underbrace{\{x = 0, |\xi| \leq C\}}_{\gamma_4}. \end{aligned}$$

Puis nous calculons la variation de l'argument de q le long de la frontière de K dans le sens positif. Premièrement, puisque pour ξ assez grand, il existe $M > 0$ tel que $q(x, \xi) = a(x)\xi^M + \mathcal{O}(\xi^{M-1})$, nous voyons que pour C assez grand

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \arg_{\gamma_1} q &= \operatorname{var} \arg_{S^1} a(x) \\ &= -\operatorname{var} \arg_{\gamma_3} q. \end{aligned}$$

Deuxièmement, comme $q(x, \xi) = q(x + 2\pi, \xi)$, nous avons

$$\operatorname{var} \arg_{\gamma_2} q + \operatorname{var} \arg_{\gamma_4} q = 0.$$

Nous avons donc montré que la variation de l'argument de q le long de ∂K est nulle. Après une déformation de contour, nous pouvons aussi écrire, pour ϵ assez petit, que

$$\operatorname{var} \arg_{\partial K} q(x, \xi) = \sum_{z \in q^{-1}(0)} \operatorname{var} \arg_{\partial D(z, \epsilon)} q(x, \xi). \quad (3.5)$$

On conclut alors avec le lemme qui suit :

Lemme 3.4 Soit $q(z)$ une fonction sur $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}_x + i\mathbb{R}_\xi$, et C^1 dans un voisinage de 0. Si

$$q(0) = 0, \quad \pm \frac{1}{2i} \{q, \bar{q}\}(0) := \pm \frac{1}{2i} (\partial_\xi q \partial_x \bar{q} - \partial_x q \partial_\xi \bar{q})(0) > 0, \quad (3.6)$$

alors pour ϵ assez petit $\text{var arg}_{\partial D(0, \epsilon)} q(z) = \mp 2\pi$.

Preuve. On fait un développement de Taylor de q au voisinage de zéro

$$q = a(\xi + ix) + b(\xi - ix) + \mathcal{O}(\|(x, \xi)\|^2), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \{q, \bar{q}\}(0) &= |a|^2 \frac{1}{2i} \{\xi + ix, \xi - ix\}(0) + |b|^2 \frac{1}{2i} \{\xi - ix, \xi + ix\}(0) \\ &= |b|^2 - |a|^2. \end{aligned}$$

Deux cas se présentent. Si $\frac{1}{2i} \{q, \bar{q}\}(0) > 0$ alors $|b| > |a|$ et on voit que $\text{var arg } q = \text{var arg } (\xi - ix) = -2\pi$. Si $\frac{1}{2i} \{q, \bar{q}\}(0) < 0$ alors $|b| < |a|$ et on a $\text{var arg } q = \text{var arg } (\xi + ix) = +2\pi$. $\square\square$

Nous donnons maintenant un résultat d'existence de quasimode pour un système différentiel matriciel qui généralise celui établi dans le cas scalaire par M. Zworski [21].

Proposition 3.5 Pour tout z dans $\Sigma(p)$ et (x_0, ξ_0) dans T^*S^1 avec

$$z \in \sigma(p(x_0, \xi_0)), \quad \frac{1}{2i} \{q(\cdot, z), \bar{q}(\cdot, z)\}(x_0, \xi_0) > 0,$$

il existe $0 \neq u(h) \in L^2(S^1)$ tel que

$$\|(P(h) - z)u(h)\| = \mathcal{O}(h^\infty) \|u(h)\|.$$

De plus $u(h)$ a la forme $\chi(x)a(x; h)e^{i\varphi(x)/h}$ où χ est une troncature à support dans un voisinage de x_0 .

Preuve. On suppose pour commencer que $z_0 = 0$ est une valeur propre simple de $p(\rho_0)$. On cherche à construire des solutions BKW, $e^{i\varphi(x)/h}a(x; h)$, satisfaisant

$$e^{-i\varphi/h} \circ P \circ e^{i\varphi/h} a = \mathcal{O}(h^\infty), \quad (3.7)$$

$$a(x; h) \sim a_0(x) + ha_1(x) + \dots \text{ dans } C^\infty(S^1, \mathbb{C}^n), \quad a_0 \neq 0.$$

La phase doit remplir l'équation eikonale $\det p(x, \varphi'(x)) = 0$. Soit λ est la valeur propre simple C^∞ de $p(x, \xi)$ définie dans un voisinage de ρ_0 et vérifiant

$\lambda(x_0, \xi_0) = 0$. λ est analytique en ξ , et puisque $\partial_\xi \lambda(\rho_0) \neq 0$, on peut trouver une fonction φ' définie dans un voisinage de x_0 , telle que $\lambda(x, \varphi'(x)) = 0 = \det p(x, \varphi'(x))$, et $\varphi'(x_0) = \xi_0$.

Les termes a_n satisfont, eux, un système récurrentiel d'équations (les équations de transport). La procédure pour donner les expressions explicites des a_n est décrite dans [8] (p.54) pour l'opérateur $hD_x + A(x)$. Par ailleurs, pour le cas scalaire on pourra consulter [11].

On prendra ensuite comme quasimode $\chi a e^{i\varphi/h}$, où χ est à support compact dans un voisinage de x_0 . Pour la normalisation, on procède comme dans le cas scalaire, en remarquant que $\{\lambda, \bar{\lambda}\}(\rho)/2i > 0$, ce qui entraîne que $\text{Im } \varphi''(x_0) > 0$, voir [3].

Pour le cas où z_0 est une valeur propre multiple, on est ramené au cas d'une valeur propre simple après composition par r_0 et s_0 (proposition 3.2). \square

Pour une étude plus approfondie de l'existence de quasimodes pour les systèmes d'opérateurs semiclassiques, on consultera [4].

4 Problème de Grushin pour l'opérateur non-perturbé

Pour le problème de Grushin, seule l'hypothèse d'ellipticité est imposée. $q(x, \xi, z)$ désigne le déterminant de $p(x, \xi) - z$. On se place dans le cadre semiclassique. Soit z_0 un point de $\Lambda(p) = \Sigma \setminus \Phi$, et prenons ρ_\pm^0 dans $q_{z_0}^{-1}(0)$ tel que

$$\pm \frac{1}{2i} \{q(\cdot, z_0), \bar{q}(\cdot, z_0)\}(\rho_\pm^0) > 0. \quad (4.1)$$

Comme $dq_{z_0}, d\bar{q}_{z_0}$ sont linéairement indépendant, il existe un voisinage $U(z_0)$ de z_0 et $\rho_\pm(z) \in C^\infty(U(z_0))$ pour lequel $q(\rho_\pm(z), z) = 0$, $\rho_\pm(z_0) = \rho_\pm^0$ et

$$\pm \frac{1}{2i} \{q(\cdot, z), \bar{q}(\cdot, z)\}(\rho_\pm(z)) > 0. \quad (4.2)$$

On suppose pour commencer que 0 est une valeur propre simple de $p(\rho_\pm^0) - z_0$. Dans le cas général $\dim \mathcal{N}(p(\rho_\pm^0) - z_0) = 1$, la proposition 3.3 montre qu'après composition par r_0 et s_0 on est ramené au cas d'une valeur propre simple.

Utilisant le paragraphe 3 du Ch.I de [9], on déduit qu'il existe un voisinage $W(z_0)$ de z_0 , un voisinage V_\pm de ρ_\pm pour lesquels il existe une matrice $u_\pm(x, \xi)$ inversible pour chaque $(x, \xi) \in V_\pm$, une fonction scalaire $\lambda_\pm(x, \xi)$ vérifiant

$$\lambda_\pm(\rho_\pm(z)) = z, \quad \forall (x, \xi) \neq \rho_\pm(z), \quad \lambda_\pm(x, \xi) \neq z, \quad (4.3)$$

et une matrice $(n-1) \times (n-1)$, $h_{\pm}(x, \xi)$, avec

$$\forall(x, \xi) \in V_{\pm}, \forall z \in W(z_0), \quad \det(h_{\pm} - z) \neq 0, \quad (4.4)$$

tels que

$$\begin{aligned} \forall(x, \xi) \in V_{\pm}, \forall z \in W(z_0), \\ u_{\pm}(x, \xi)(p(x, \xi) - z)u_{\pm}^{-1}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm}(x, \xi) - z & 0 \\ 0 & h_{\pm}(x, \xi) - z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Puisque V est relativement compact, $u, u^{-1}, h, p \in S(V, 1)$. On adapte ensuite un résultat du à M. Taylor [19], voir aussi [13], proposition 3.1.1,

Proposition 4.1 *Soit Ω un ouvert de T^*S^1 . Soit $A \in S_{cl}(\Omega, 1)$, dont le symbole principal vérifie*

$$UA_0U^{-1} = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix}, \quad U, U^{-1} \in S(\Omega, 1),$$

où pour chaque (x, ξ) , $A_0^{11}(x, \xi)$ et $A_0^{22}(x, \xi)$ ont des spectres disjoints. Il existe alors $\tilde{U} \in S_{cl}(\Omega, 1)$, $\tilde{U}^{-1} \in S_{cl}(\Omega, 1)$ vérifiant

$$\tilde{U}\#\tilde{U}^{-1} \sim 1, \quad \tilde{U}^{-1}\#\tilde{U} \sim 1, \quad \tilde{U} \equiv U \bmod hS_{cl}(\Omega, 1),$$

(d'où la puissance -1) dans $S(\Omega, 1)$ tels que

$$\tilde{U}\#A\#\tilde{U}^{-1} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22} \end{pmatrix},$$

avec $\tilde{A}_0^{jj} = A_0^{jj}$.

Dans notre cas, nous obtenons

Corollaire 4.2 *Soit $P(x, \xi) - z$ le symbole de l'opérateur $P - z$, alors il existe $U_{\pm}, U_{\pm}^{-1}, H_{\pm}$, et $\tilde{\lambda}_{\pm} \in S_{cl}(V_{\pm}, 1)$ tels que*

$$U_{\pm}(x, \xi; h)\#(P(x, \xi) - z)\#U_{\pm}^{-1}(x, \xi; h) \sim \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{\pm}(x, \xi; h) - z & 0 \\ 0 & H_{\pm}(x, \xi; h) - z \end{pmatrix}$$

dans $S(V_{\pm}, 1)$, où le symbole principal de $\tilde{\lambda}_{\pm}$ est λ_{\pm} et celui de H_{\pm} , h_{\pm} .

H_{\pm} est elliptique au sens semiclassique, et compte tenu de la proposition 3.2, le symbole principal λ_{\pm} de $\tilde{\lambda}_{\pm}$ vérifie pour chaque $z \in W(z_0)$,

$$\rho_{\pm}(z) \in \lambda_{\pm}^{-1}(z), \quad \pm \frac{1}{2i} \{\lambda_{\pm}, \bar{\lambda}_{\pm}\}(\rho_{\pm}, z) > 0. \quad (4.6)$$

On est ainsi ramené au cas scalaire traité dans [11]. La proposition 3.3 de [11] montre qu'il existe un voisinage $\widetilde{W}(z_0) \subset W(z_0)$ de z_0 , un voisinage $\widetilde{V}_{\pm} \subset V_{\pm}$ contenant $\rho_{\pm}(z)$, $z \in \widetilde{W}(z_0)$, deux symboles $q_{\pm} \in S_{cl}(\widetilde{V}_{\pm}, 1)$, et $g_{\pm} \in S_{cl}(\pi_x(\widetilde{V}_{\pm}), 1)$ qui dépendent de manière C^{∞} de $z \in \widetilde{W}(z_0)$ tels que

$$\tilde{\lambda}_{+}(x, \xi; h) - z \sim q_{+}(x, \xi, z; h) \# (\xi + g_{+}(x, z; h)) \text{ dans } S(\widetilde{V}_{+}, 1), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\lambda}_{-}(x, \xi; h) - z \sim (\xi + g_{-}(x, z; h)) \# q_{-}(x, \xi, z; h) \text{ dans } S(\widetilde{V}_{+}, 1), \quad (4.8)$$

où pour $z \in \widetilde{W}$, $g_{\pm,0}(x_{\pm}(z), z) = -\xi_{\pm}(z)$, et $q_{\pm,0}(\rho_{\pm}(z), z) \neq 0$. g_{\pm} est définie sur $\pi_x(\widetilde{V}_{\pm})$, on prolonge g_{\pm} dans $C^{\infty}(\mathbb{R})$ de telle sorte que

$$g_{\pm}(y) = \mp \frac{i}{C_{\pm}}(y - x_{\pm}), \quad |y| \geq C, \quad C_{\pm} > 0, \quad (4.9)$$

et aussi $\text{Im } g_{\pm}(y) \neq 0$, $y \neq x_{\pm}(z)$.

On identifiera fréquemment les intervalles de \mathbb{R} de longueur $< 2\pi$ à des intervalles de S^1 .

Soit $\Upsilon_{\pm} \in L^2(\mathbb{R})$ les solutions normalisées de

$$\begin{aligned} (hD_x + g_{+})\Upsilon_{+} &= 0 \\ (hD_x + g_{-})^{*}\Upsilon_{-} &= 0. \end{aligned}$$

Υ_{\pm} est de la forme $h^{-\frac{1}{4}}a_{\pm}(x, z; h)e^{\frac{i}{h}\varphi_{\pm}(x, z)}$, avec $\varphi_{\pm}(x_{\pm}, z) = 0$, $\varphi'_{\pm}(x_{\pm}, z) = \xi_{\pm}$, $\text{Im } \varphi_{\pm} \geq 0$. On note $\Upsilon_{\pm}^0 := (\Upsilon_{\pm}, 0, \dots, 0) \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$.

Sans perte de généralité on suppose que z_0 est une valeur propre simple de $p(\rho^j)$ pour tout $1 \leq j \leq \beta$, β étant la valeur constante de $\beta(z)$ sur une composante connexe de $\Sigma \setminus \Phi$. Soient $\Theta_{\pm}^j \subset \widetilde{V}_{\pm}^j$ des voisinages de ρ_{\pm}^j tels que $\overline{\Theta_{\pm}^j} \cap \overline{\Theta_{\pm}^k} = \emptyset$ pour $j \neq k$, et

$$\chi_{\pm}^j \in C_0^{\infty}(\Theta_{\pm}^j) \text{ indépendants de } h, \quad \chi_{\pm}^j = 1 \text{ près de } \rho_{\pm}^j(\widetilde{W}(z_0)), \quad (4.10)$$

$$\phi_{\pm}^j \in C_0^{\infty}(\pi_x(\Theta_{\pm}^j)), \text{ indépendants de } h, \quad \phi_{\pm}^j = 1 \text{ près de } \pi_x(\rho_{\pm}^j(\widetilde{W}(z_0))).$$

Et, soient $\chi_{\pm}^j \prec \widehat{\chi}_{\pm}^j \in C_0^{\infty}(\Theta_{\pm}^j)$ satisfaisant $\widehat{\chi}_{\pm}^j = 1$ près de $\rho_{\pm}^j(\widetilde{W}(z_0))$, et $\phi_{\pm}^j \prec \widetilde{\phi}_{\pm}^j$ tels que $\widetilde{\phi}_{\pm}^j = 1$ près de $\pi_x(\rho_{\pm}^j(\widetilde{W}(z_0)))$.

On introduit les fonctions définies sur S^1 ,

$$e_+ = \phi_+(U_+^{-1} \# \chi_+)^w \Upsilon_+^0, \quad f_+ = \tilde{\phi}_+(U_+^* \# \hat{\chi}_+)^w \Upsilon_+^0, \quad (4.11)$$

$$e_- = \phi_-(\chi_- \# U_-^*)^w \Upsilon_-^0, \quad f_- = \tilde{\phi}_-(\hat{\chi}_- \# U_-^{-1})^w \Upsilon_+^0 \quad (4.12)$$

Nous avons

$$\langle e_{\pm}, f_{\pm} \rangle = 1 + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (4.13)$$

et il existe $C > 0$, une constante indépendante de h , telle que $\frac{1}{C} \leq \|e_{\pm}\|, \|f_{\pm}\| \leq C$. On normalise e_{\pm} et on multiplie en conséquence f_{\pm} par une constante indépendante de h , pour que (4.13) reste vérifié.

Proposition 4.3 $e_{\pm} \in L^2(S^1)$ sont des solutions BKW normalisées,

$$\|(P - z)e_+\|_{L^2(S^1)}, \|(P - z)^*e_-\|_{L^2(S^1)} = \mathcal{O}(h^\infty). \quad (4.14)$$

De plus, e_{\pm} admet une expression de la forme

$$e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x,z)} I_{\pm}(x, z; h) + r(x; h), \quad I_{\pm} \in \mathbb{M}_{n,1}, \quad (4.15)$$

où $I_{\pm}^i(x, z; h)$ est à support compact et admet un développement en puissances de h , localement uniformément en x dans $C^\infty(S^1)$,

$$I^i(x, z; h) \sim h^{-1/4} (I_0^i(x, z) + hI_1^i(x, z) + \dots) \quad (4.16)$$

où φ_{\pm} a été introduit pour Υ_{\pm} , et $r(x, h)$ vérifie $D_x^\alpha r = \mathcal{O}(h^N)$, pour tous α, N , uniformément en x . e_{\pm} est donc microlocalement concentré près de $(x_+(z), \xi_+(z))$. f_{\pm} admet une représentation similaire à e_{\pm} .

L'expression (4.15) résulte d'un résultat de Melin-Sjöstrand [16] sur l'action d'un opérateur pseudodifférentiel sur une fonction BKW avec une phase complexe φ admettant un point critique non-dégénéré et vérifiant $\text{Im } \varphi \geq 0$.

Théorème 4.4 Pour tout z dans $\widetilde{W}(z_0)$,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^m(S^1; \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^\beta \rightarrow L^2(S^1; \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^\beta,$$

avec

$$(R_+ u)_j := \langle u, f_+^j \rangle, \quad u \in H_{sc}^m, \quad (4.17)$$

$$R_- u_- := \sum_k f_-^k u_-^k, \quad u_- \in \mathbb{C}^\beta, \quad (4.18)$$

est inversible d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + \mathcal{O}(h^\infty) & F_+ + \mathcal{O}(h^\infty) \\ G_- + \mathcal{O}(h^\infty) & \mathcal{O}(h^\infty) \end{pmatrix}$$

où $E_0 = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}})$, et

$$F_+ v_+ = \sum_k v_+^k e_+^k, \quad v_+ \in \mathbb{C}^\beta, \quad (4.19)$$

$$(G_- v)_k = \langle v, e_-^k \rangle, \quad v \in L^2. \quad (4.20)$$

De plus E_0 ne propage les supports au sens où si $\psi_1, \psi_2 \in S(T^*\mathbb{R}, 1)$ à support disjoint avec $|\pi_x(\text{supp } \psi)| < 2\pi$, et pour $i = 1, 2$, $\chi_i(x) \prec \tilde{\chi}_i(x) \in C_0^\infty(S^1)$, avec $\{x; \pi_x(\psi_i) = 1\} \subset \text{supp } \chi_i$, alors

$$\tilde{\chi}_2 \psi_2^w \chi_2 E_0 \tilde{\chi}_1 \psi_1^w \chi_1 = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \text{dans } \mathcal{L}(L^2(S^1), H_{sc}^1(S^1)).$$

5 Problème de Grushin pour l'opérateur perturbé

Commençons par rappeler la proposition suivante qui améliore celle de [12], section 6. Pour la preuve qui simplifie celle de [12], on consultera [2].

Proposition 5.1 *Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables complexes indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. Si $\sum \sigma_i^2 < \infty$, alors on a*

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |Y_i|^2 \geq x\right) \leq \exp\left[\frac{C_0}{2s_1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sigma_i^2 - \frac{x}{2s_1}\right].$$

Ici $s_1 = \max \sigma_i^2$, et $C_0 > 0$.

Corollaire 5.2 *Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables complexes indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. Si $\sum \sigma_i < \infty$, alors il existe $C_0 > 0$ tel que*

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |Y_i| \geq x\right) \leq \exp\left[\frac{C_0}{2\|\sigma\|_\infty} \|\sigma\|_1 - \frac{x^2}{2\|\sigma\|_\infty \|\sigma\|_1}\right],$$

où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme ℓ^p .

Preuve. Par Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |Y_i| \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sigma_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\sqrt{\sigma_i} X_i|^2\right)^{1/2} \geq x\right),$$

où $Y_i = \sigma_i X_i$, $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On utilise la proposition 5.1 pour achever la preuve. \square

La norme de $\|Q_\omega\|_{H_{sc}^m(S^1) \rightarrow L^2(S^1)}$ est majorée par

$$C \sup_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, x \in S^1} \|Q_\alpha(x)\| \leq \tilde{C} \sup_{\ell, m, \alpha} \|Q_\alpha^{\ell, m}(x)\|_{L^\infty}, \quad (5.1)$$

où C, \tilde{C} sont des constantes strictement positives et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Proposition 5.3 *On suppose admis l'hypothèse 2.4. Il existe $C > 0$ tel que pour chaque $x > 0$, et $0 < h \ll 1$, on ait*

$$\mathbb{P}(\|Q_\omega\|_{H_{sc}^m(S^1) \rightarrow L^2(S^1)} \leq x) \geq 1 - \exp(C - \frac{x^2}{C}). \quad (5.2)$$

Q_ω est donc bornée presque sûrement comme opérateur de $H_{sc}^m(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$.

Preuve. Majorant $\|Q_\alpha^{\ell, m}(x)\|_{L^\infty}$ par la somme des valeurs absolues $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |q_{\alpha, k}^{\ell, m}|$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|Q\|_{H_{sc}^m(S^1) \rightarrow L^2(S^1)} \leq x) &\leq \mathbb{P}(\sum_{\alpha, \ell, m} \|Q_\alpha^{\ell, m}(x)\|_{L^\infty} \leq \frac{x}{\tilde{C}}) \\ &\leq \mathbb{P}(\sum_{\alpha, \ell, m, k} |q_{\alpha, k}^{\ell, m}| \leq \frac{x}{\tilde{C}}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nous utilisons le corollaire 5.2, (5.3) devient alors

$$\leq \exp[\frac{C_0}{2 \sup \sigma_{\alpha, k}^{\ell, m}} \sum \sigma_{\alpha, k}^{\ell, m} - \frac{x^2}{2 \tilde{C}^2 \sup(\sigma_{\alpha, k}^{\ell, m}) \sum \sigma_{\alpha, k}^{\ell, m}}],$$

ce qui termine la preuve puisque par hypothèse σ_k est sommable. \square

Corollaire 5.4 *On suppose que l'hypothèse 2.4 est vérifiée. Il existe alors $C > 0$ tel que pour tout $0 < h \ll 1$*

$$\mathbb{P}(\|Q_\omega\|_{H_{sc}^m(S^1) \rightarrow L^2(S^1)} \leq \ln(h^{-1})) \geq 1 - Ce^{-\frac{1}{C}(\ln h)^2}.$$

Dans la suite on travaille sous l'hypothèse 2.4.

Proposition 5.5 Soit $\delta \ll \sqrt{h}$ un paramètre de perturbation et z_0 dans $\Sigma \setminus \Phi$. Il existe un voisinage $\widetilde{W}(z_0)$ de z_0 inclus dans $\Sigma \setminus \Phi$ tel que avec une probabilité

$$\geq 1 - Ce^{-\frac{1}{C}(\ln h)^2}$$

pour tout z dans $\widetilde{W}(z_0)$,

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P - z - \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

est continu $H_{sc}^m(S^1) \times \mathbb{C}^\beta \rightarrow L^2(S^1) \times \mathbb{C}^\beta$ et admet un inverse \mathcal{E}^δ de la forme

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}^0 + \begin{pmatrix} \sum_{j \geq 1} E(\delta Q E)^j & \sum_{j \geq 1} (E \delta Q)^j E_+ \\ \sum_{j \geq 1} E_-(\delta Q E)^j & \sum_{j \geq 1} E_-(\delta Q E)^{j-1} (\delta Q E_+) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$= \mathcal{E}^0 + \ln(h^{-1}) \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\frac{\delta}{h}) & \mathcal{O}(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ \mathcal{O}(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & \mathcal{O}(\delta) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Preuve. Nous avons $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 - K$ où

$$K = \begin{pmatrix} \delta Q E & \delta Q E_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe $C > 0$ tel que avec une probabilité supérieure à $1 - Ce^{-\frac{1}{C}(\ln h)^2}$ on ait $\|Q\|_{H_{sc}^m \rightarrow L^2} \leq \ln(h^{-1})$, impliquant

$$\|K\| < C\delta\|Q\|\|E\| \ll 1.$$

□

Dans la suite, on suppose que $\|Q\|_{H_{sc}^m \rightarrow L^2} \leq \ln(h^{-1})$, et $\delta \ll \sqrt{h}$.

6 Propriétés d'holomorphie de E_{-+}

Puisque $\partial_{\bar{z}}(\mathcal{P}\mathcal{E}) = 0$, nous avons

$$\partial_{\bar{z}} E_{-+} = -E_{-+}(\partial_{\bar{z}} R_+)E_+ - E_-(\partial_{\bar{z}} R_-)E_{-+}. \quad (6.1)$$

Donc, grâce à la cyclicité de la trace, nous obtenons

$$\partial_{\bar{z}} \det E_{-+} = \text{tr}((\partial_{\bar{z}} E_{-+})E_{-+}^{-1}) \det E_{-+} \quad (6.2)$$

$$= -\text{tr}((\partial_{\bar{z}} R_+)E_+ + E_-(\partial_{\bar{z}} R_-)) \det E_{-+} \quad (6.3)$$

$$=: -k_0(z) \det E_{-+}(z).$$

Dès lors, si on choisit une solution de l'équation

$$\frac{1}{h}\partial_{\bar{z}}l_0 = k_0, \quad l_0(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\widetilde{W}(z_0)} \frac{k_0(z')}{z - z'} d\operatorname{Re} z' d\operatorname{Im} z' \quad (6.4)$$

dans un voisinage de $\widetilde{W}(z_0)$, nous obtenons une fonction $e^{l_0/h} \det E_{-+}$ holomorphe avec les mêmes zéros que $\det E_{-+}$ dans $\widetilde{W}(z_0)$.

Proposition 6.1 $\Delta \operatorname{Re} l_0(z)$, défini sur $\widetilde{W}(z_0)$, est strictement sousharmonique et

$$(\Delta \operatorname{Re} l_0(z) + \mathcal{O}(h)) d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z = \sum_{1 \leq j \leq \beta} (d\xi_-^j \wedge dx_-^j - d\xi_+^j \wedge dx_+^j). \quad (6.5)$$

Dans [11], Hager utilise des arguments géométriques pour démontrer ce résultat. Nous proposons ici une preuve directe.

Preuve. Rappelons $\Delta := 4\partial_z\partial_{\bar{z}}$. Nous avons montré que

$$\frac{1}{h}\partial_{\bar{z}}l_0 = k_0(z) = \sum_{1 \leq j \leq \beta} ((\partial_{\bar{z}}R_+)E_+)_{j,j} + (E_-(\partial_{\bar{z}}R_-))_{j,j} \quad (6.6)$$

$$= \sum_j \langle e_+^j, \partial_z f_+^j \rangle + \langle \partial_{\bar{z}} f_-^j, e_-^j \rangle + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (6.7)$$

Nous avons

$$\langle e_+, \partial_z f_+ \rangle = \langle e_+, i(\partial_z \varphi_+)(x, z) f_+ \rangle + \mathcal{O}(h).$$

Puisque $\langle e_+, f_+ \rangle = 1 + \mathcal{O}(h^\infty)$, alors le lemme de la phase stationnaire implique que

$$\langle e_+, \partial_z f_+ \rangle = -i \overline{(\partial_z \varphi_+)}(x_+(z), z) + \mathcal{O}(h).$$

De même, on montre que

$$\langle \partial_{\bar{z}} f_-, e_- \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = i(\partial_{\bar{z}} \varphi_-)(x_-(z), z) + \mathcal{O}(h).$$

Il ne reste alors plus qu'à achever la preuve avec le lemme suivant.

Lemme 6.2 Soit $\varphi_+(x, z)$ dans $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ et vérifiant pour tous z

$$\varphi_+(x_+(z), z) = 0, \quad (\partial_x \varphi_+)(x_+(z), z) = \xi_+(z) \in \mathbb{R}, \quad (6.8)$$

$$\lambda_+(x_+, \xi_+) - z = 0, \quad (6.9)$$

alors pour tout z ,

$$4 \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{(\partial_z \varphi_+)}(x_+(z), z) \right) (z) d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z = -d\xi_+ \wedge dx_+. \quad (6.10)$$

Preuve. (On a un lemme similaire avec φ_- .) Rappelons que

$$-\frac{1}{2i}dz \wedge d\bar{z} = d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z. \quad (6.11)$$

Commençons par remarquer que, avec $\lambda \equiv \lambda_+$ (Pour simplifier, on n'écrira pas l'indice dans φ_+ .)

$$\begin{pmatrix} \lambda'_x & \lambda'_\xi \\ \bar{\lambda}'_x & \bar{\lambda}'_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z x_+ \\ \partial_z \xi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

C'est à dire après inversion de la matrice carrée dont le déterminant est $\{\bar{\lambda}, \lambda\}$,

$$\frac{1}{\{\bar{\lambda}, \lambda\}} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}'_\xi & -\lambda'_\xi \\ -\bar{\lambda}'_x & \lambda'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z x_+ \\ \partial_z \xi_+ \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Nous en tirons les relations suivantes,

$$\partial_z x_+ = \frac{1}{\{\bar{\lambda}, \lambda\}} \bar{\lambda}'_\xi, \quad \partial_{\bar{z}} x_+ = -\frac{1}{\{\bar{\lambda}, \lambda\}} \lambda'_\xi, \quad (6.14)$$

et

$$\partial_z \xi_+ = -\frac{1}{\{\bar{\lambda}, \lambda\}} \bar{\lambda}'_x, \quad \partial_{\bar{z}} \xi_+ = \frac{1}{\{\bar{\lambda}, \lambda\}} \lambda'_x. \quad (6.15)$$

De l'équation $\lambda(x, \varphi'_x(x, z)) - z = 0$, il vient

$$\lambda'_\xi(x, \varphi'_x(x, z)) \varphi''_{x, \bar{z}}(x, z) = 0, \text{ soit } \varphi''_{x, \bar{z}} = 0, \quad (6.16)$$

et

$$0 = \lambda'_x(x, \varphi'_x) + \lambda'_\xi(x, \varphi'_x) \varphi''_{x, x}, \text{ soit } \varphi''_{x, x} = -\frac{\lambda'_x}{\lambda'_\xi}(x, \varphi'_x). \quad (6.17)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'égalité (6.10). Nous avons facilement

$$\begin{aligned} M(z) &:= \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{(\partial_z \varphi)}(x_+(z), z) \right) (z) = -\operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left((\partial_z \varphi)(x_+(z), z) \right) (z) \\ &= -\operatorname{Im} (\varphi''_{x, z}(x_+, z) \partial_{\bar{z}} x_+ + \varphi''_{z, \bar{z}}(x_+, z)) \end{aligned}$$

et, aussi sous l'hypothèse $\varphi(x_+, z) = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(\varphi(x_+, z)) &= \varphi'_x(x_+, z) \partial_{\bar{z}} x_+ + \varphi'_{\bar{z}}(x_+, z) = 0, \\ \partial_z \partial_{\bar{z}}(\varphi(x_+, z)) &= \varphi'_x(x_+, z) \partial_z \partial_{\bar{z}} x_+ + \varphi''_{x, z}(x_+, z) \partial_{\bar{z}} x_+ + \varphi''_{x, x}(x_+, z) |\partial_z x_+|^2 \\ &\quad + \varphi''_{x, \bar{z}}(x_+, z) \partial_z x_+ + \varphi''_{z, \bar{z}}(x_+, z). \end{aligned}$$

Par hypothèse, le terme $\varphi'_x(x_+, z)\partial_z\partial_{\bar{z}}x_+$ est réel. Et donc, regroupant tout ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned} M(z) &= \text{Im} (\varphi''_{x,\bar{z}}(x_+, z) \partial_z x_+) + |\partial_z x_+|^2 \text{Im} \varphi''_{x,x}(x_+, z) \\ &= -\frac{|\lambda'_\xi|^2}{|\{\lambda, \bar{\lambda}\}|^2} \text{Im} \left(\frac{\lambda'_x}{\lambda'_\xi} \right) = -\frac{1}{|\{\lambda, \bar{\lambda}\}|^2} \text{Im} \lambda'_x \bar{\lambda}'_\xi \\ &= -\frac{1}{|\{\lambda, \bar{\lambda}\}|^2} \frac{\{\bar{\lambda}, \lambda\}}{2i} = -\frac{\{\lambda, \bar{\lambda}\}}{\{\lambda, \bar{\lambda}\}^2 2i} = \frac{-1}{2i\{\lambda, \bar{\lambda}\}}, \end{aligned}$$

car $|\{\lambda, \bar{\lambda}\}|^2 = -\{\lambda, \bar{\lambda}\}^2$. Le côté gauche de (6.10) $= \frac{-2}{i\{\lambda, \bar{\lambda}\}} d\text{Re}z \wedge d\text{Im}z$. Pour finir, un calcul direct, au moyen de (6.14) et (6.15), donne $d\xi_+ \wedge dx_+ = \frac{1}{\{\lambda, \bar{\lambda}\}} dz \wedge d\bar{z}$. $\square\square$

Pour le problème perturbé, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \det E_{-+}^\delta &= -\text{tr}((\partial_{\bar{z}} R_+) E_+^\delta + E_-^\delta (\partial_{\bar{z}} R_-)) \det E_{-+}^\delta \\ &=: -k^\delta(z) \det E_{-+}^\delta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Alors, grâce à la proposition 5.5, et au fait que $\|\partial_z e_+\|, \|\partial_{\bar{z}} e_-\| = \mathcal{O}(1/h)$, nous obtenons

$$|k^\delta - k^0| = \mathcal{O}\left(\frac{\delta \ln(h^{-1})}{h^{3/2}}\right).$$

On suppose maintenant que $\delta < \frac{h^{3/2}}{\ln(h^{-1})}$.

Proposition 6.3 *Soit l^δ une solution de l'équation $\frac{1}{h}\partial_z l^\delta = k^\delta$,*

$$l^\delta(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\widetilde{W}(z_0)} \frac{k^\delta(z')}{z - z'} d\text{Re}z' d\text{Im}z',$$

rendant $e^{l^\delta/h} E_{-+}^\delta$ holomorphe, alors $|l^\delta - l^0| = \ln(h^{-1}) \mathcal{O}(\frac{\delta}{\sqrt{h}})$.

Preuve. Nous avons :

$$(l^\delta - l^0)(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\widetilde{W}(z_0)} \frac{(k^0 - k^\delta)(z')}{z - z'} d\text{Re}z' d\text{Im}z' \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} |(l^\delta - l^0)(z)| &\leq h \|k^\delta - k^0\|_{L^\infty(\widetilde{W}(z_0))} \int_{\widetilde{W}(z_0)} \frac{1}{|z - z'|} d\text{Re}z' d\text{Im}z' \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\delta \ln(h^{-1})}{\sqrt{h}}\right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

\square

7 Estimation de la probabilité que $\det E_{-+}^\delta$ soit petit

Ici $z_0 \in \Omega$ impliquant que l'hypothèse 2.6 est vérifiée pour tout $z \in \widetilde{W}(z_0)$. Si on se restreint à $\|Q\| \leq \ln(h^{-1})$, on sait alors que E_{-+}^δ s'écrit

$$E_{-+} + E_- Q^\delta E_+ + E_- Q^\delta \left(\sum_{j \geq 0} E (Q^\delta E)^j \right) Q^\delta E_+, \quad (7.1)$$

où $Q^\delta := \delta Q$. Le terme entre parenthèses, que l'on désigne par \widetilde{E} , est $\mathcal{O}(1/\sqrt{h})$. Nous introduisons les opérateurs E_\pm^j par $E_+^j v_+ = v_+ e_+^j$ si $v_+ \in \mathbb{C}$, et $E_-^j v = \langle v, e_-^j \rangle$ si $v \in L^2(S^1, \mathbb{C}^\beta)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \det E_{-+}^\delta &= \sum_{\pi \in S_n} \prod_{1 \leq j \leq \beta} \left(\langle Q^\delta e_+^{\pi(j)}, e_-^j \rangle (\text{sign}(\pi)) + E_-^j Q^\delta \widetilde{E} Q^\delta E_+^{\pi(j)} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \quad (7.2)$$

L'opérateur \widetilde{E} satisfait la condition de non propagation du support au sens défini dans la proposition 4.4. Alors grâce à l'hypothèse 2.3 (plus particulièrement grâce au fait que $x_+^j \neq x_-^k$ pour $j \neq k$) cela implique que

$$\det E_{-+}^\delta = \prod_j \left(\langle Q^\delta e_+^j, e_-^j \rangle + E_-^j Q^\delta \widetilde{E} Q^\delta E_+^j \right) + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (7.3)$$

On remarque ensuite, que si

$$|\langle Q^\delta e_+^j, e_-^j \rangle| \geq \frac{3}{2} x^{\frac{1}{\beta}}, \text{ et } |E_-^j Q^\delta \widetilde{E} Q^\delta E_+^j| \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{\beta}}, \quad (7.4)$$

alors nous avons

$$|\langle Q^\delta e_+^j, e_-^j \rangle + E_-^j Q^\delta \widetilde{E} Q^\delta E_+^j| \geq x^{\frac{1}{\beta}}. \quad (7.5)$$

Ce qui entraîne la minoration suivante (confère l'inégalité $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$, si A et B sont deux évènements non-indépendants)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\det E_{-+}^\delta| \geq x) &\geq \mathbb{P}(\|Q\| \leq \ln(h^{-1})) - 2\beta \\ &\quad + \sum_{1 \leq j \leq \beta} (\mathbb{P}(|\langle Q^\delta e_+^j, e_-^j \rangle| \geq \frac{3}{2} x^{\frac{1}{\beta}}) + \mathbb{P}(|E_-^j Q^\delta \widetilde{E} Q^\delta E_+^j| \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{\beta}})). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Lemme 7.1 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout j ,*

$$\mathbb{P}(\|Q^\delta e_+^j\| \leq x) \geq 1 - C \exp(-\frac{1}{C\delta^2} x^2). \quad (7.7)$$

La conclusion est la même pour $\|\delta Q^ e_-^j\|$. Soit*

$$\mathbb{P}(|E_-^j Q^\delta \tilde{E} Q^\delta E_+^j| \leq x) \geq 1 - \tilde{C} \exp(-\frac{1}{\tilde{C}\delta^2} x\sqrt{h}).$$

Preuve. Avec l'aide de (5.2), nous trouvons

$$\mathbb{P}(\|Q\| \leq \frac{x}{\|e_+^j\|}) \geq 1 - C \exp(-\frac{1}{C} x^2). \quad (7.8)$$

pour une constante $C > 0$. Soit $\tilde{C} > 0$, une constante satisfaisant $\|\tilde{E}\| \leq 1/(\tilde{C}\sqrt{h})$. Nous avons

$$|E_-^j Q \tilde{E} Q E_+^j| = |\langle \tilde{E} Q e_+^j, Q^* e_-^j \rangle| \leq \|Q e_+^j\| \|Q^* e_-^j\| \tilde{C} h^{-\frac{1}{2}}.$$

On termine en appliquant l'inégalité citée avant (7.6), puisque les variables $Q e_+^j$ et $Q^* e_-^j$ ne sont pas indépendantes. \square

On cherche maintenant à préciser la loi de probabilité de $\langle Q e_+, e_- \rangle$, où $e_\pm \equiv e_\pm^j$ pour un j fixé. Un calcul direct de $\langle Q e_+, e_- \rangle$ donne

$$\sum_{\ell, m, \alpha} \langle Q_\alpha^{\ell, m}(x) (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle = \sum_{\ell, m, \alpha, k} q_{\alpha, k}^{\ell, m} \langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle. \quad (7.9)$$

où $e_{\pm, i}$ sont les coordonnées de e_\pm et $e_k := \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. Il devient alors évident que $\langle Q e_+, e_- \rangle$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la variance satisfaisant

$$\sigma^2 = \sum_{\ell, m, \alpha, k} (\sigma_{\alpha, k}^{\ell, m})^2 |\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle|^2. \quad (7.10)$$

Reste ensuite à donner le comportement de σ^2 lorsque $h \rightarrow 0$.

Lemme 7.2 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout z dans $\widetilde{W}(z_0)$, où $\widetilde{W}(z_0)$ représente l'ensemble introduit dans la proposition 5.5,*

- (a) *si $|k| \leq \frac{1}{hC}$ on a $|\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle| = \mathcal{O}(h^\infty)$,*
- (b) *si $\frac{1}{hC} \leq |k| \leq \frac{C}{h}$ on a $|\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle| = \mathcal{O}(1)$,*
- (c) *si $|k| \geq \frac{C}{h}$ on a $|\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+, m}, e_{-, \ell} \rangle| = \mathcal{O}(1/|k|^\infty)$.*

Preuve. Pour (b), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle| \leq \|e_{-,\ell}\| \|(hD_x)^\alpha e_{+,m}\| = \mathcal{O}(1).$$

Pour (a) et (c), on remarque d'abord que $\langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle$ est une intégrale du type

$$h^{-1/2} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{i}{h}\phi(x,z)+ikx} \chi(x) dx,$$

où $\phi = \bar{\varphi}_- - \varphi_+$, satisfait $\phi'(x(z)) = \xi_-(z) - \xi_+(z) \neq 0$ si $x(z) = x_+(z) = x_-(z)$, et χ est une troncature à support inclus dans un voisinage de $x(z)$. Ecrivons $\varphi := -\frac{\phi}{h} + kx$. Il existe $C > 0$ pour lequel

$$\forall z \in \widetilde{W}(z_0), \quad \forall |k| \notin [\frac{1}{hC}, \frac{C}{h}], \quad |\varphi'(z)| \geq \frac{1}{C} \max(|k|, 1/h).$$

On s'est servi du fait que $\inf |\phi'| \neq 0$ dans un voisinage de $x(z)$. Finalement, on procède par intégration par partie pour trouver

$$\begin{aligned} \langle e_k (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle &= \frac{1}{i} \int e^{i\varphi(x)} a_n(x) dx, \\ a_n &:= \left(-\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{\varphi'} \right)^n (\chi) = \mathcal{O}((\max(1/|k|, h))^n). \end{aligned} \quad (7.11)$$

□

Proposition 7.3 *Soit Q vérifiant l'hypothèse 2.4. Il existe $\tilde{C} > 0$, tels que nous avons $\langle Qe_+, e_- \rangle \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où la variance vérifie*

$$\frac{1}{\tilde{C}} h^{2\rho-1/2} \leq \sigma^2 \leq \tilde{C} h^{2\rho-1/2}.$$

Preuve. Pour la borne inférieure, il suffit de montrer qu'il existe m , et ℓ pour lesquels nous avons pour $\alpha = \alpha_1$,

$$\frac{1}{C} h^{2\rho-1/2} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sigma_{\alpha_1, k}^{\ell, m})^2 |\langle e_k (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle|^2 \quad (\leq \sigma^2). \quad (7.12)$$

Considérons alors pour chaque ℓ, m , la somme (7.12). On découpe la sommation sur k en trois, suivant $k \gg 1/h$, $k \ll 1/h$, et $k \sim 1/h$, de façon précise (7.12) s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{|k| < \frac{1}{hC}, |k| > \frac{C}{h}} (\sigma_{\alpha_1, k}^{\ell, m})^2 |\langle e_k (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle|^2 \\ + \sum_{\frac{1}{Ch} \leq |k| \leq \frac{C}{h}} (\sigma_{\alpha_1, k}^{\ell, m})^2 |\langle e_k (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell} \rangle|^2, \end{aligned} \quad (7.13)$$

où $C > 0$ est la constante du lemme 7.2. Ce dernier montre que le premier terme est $\mathcal{O}(h^\infty)$. Ensuite, grâce à l'identité de Parseval et l'hypothèse 2.10 de minoration sur les variances $\sigma_{\alpha_1, k}^{\ell, m}$, le second membre de (7.13) est pour tous ℓ, m

$$\geq \frac{1}{\tilde{C}} h^{2\rho} \left(\|((hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}) \bar{e}_{-, \ell}\|^2 - \sum_{|k| < \frac{1}{Ch}, |k| > \frac{C}{h}} |\langle e_k (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-, \ell} \rangle|^2 \right). \quad (7.14)$$

On fait deux observations : premièrement, puisque $\|e_\pm\| = 1$, certaines coordonnées de e_\pm sont alors elliptiques, c'est à dire de terme principal non nul, et deuxièmement, si $e_{+,m}$ et $e_{+,\ell}$ sont elliptiques, alors nous avons $\|((hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}) \bar{e}_{-, \ell}\|^2 \asymp h^{-1/2}$ (car $\xi_+ \neq 0$ ou $\xi_- \neq 0$). Par conséquent, si $e_{+,m}$ et $e_{+,\ell}$ sont choisis elliptiques dans (7.12), nous avons le résultat demandé. Il suffit d'appliquer la même procédure pour montrer la borne supérieure. \square

Si X suit la loi gaussienne complexe $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right). \quad (7.15)$$

Résumons, si $z \in \widetilde{W}(z_0)$, alors $\mathbb{P}(\det E_{-+}^\delta(z) > x)$ est

$$\geq 1 + \beta(\exp[-C \frac{x^{2/\beta}}{\delta^2 h^{2\rho-1/2}}] - 1) - C\beta \exp[-\frac{x^{1/\beta}}{C\delta^2 h^{-1/2}}]. \quad (7.16)$$

Soit finalement, on déduit le résultat qui suit :

Proposition 7.4 *Pour tout z dans $\widetilde{W}(z_0)$, $\epsilon > 0$, si*

$$h^{\rho+\epsilon-\frac{1}{4}}\delta \gg \delta^2 h^{-1/2}, \text{ c'est à dire, si } \delta \ll h^{\rho+\epsilon+\frac{1}{4}},$$

alors, nous avons

$$\mathbb{P}(|\det E_{-+}^\delta(z)| \geq h^{(\rho+\epsilon-1/4)\beta} \delta^\beta) \geq 1 - Ch^{2\epsilon}. \quad (7.17)$$

8 Preuve du Théorème 2.6

Grâce à $l^\delta = l^0 + \mathcal{O}(\frac{\delta \ln(h^{-1})}{\sqrt{h}})$, on remarque que

$$\begin{aligned} |e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta| &\leq e^{\frac{\operatorname{Re} l^0}{h} + \mathcal{O}(\frac{\delta \ln(h^{-1})}{h^{3/2}})} \\ &\times \prod_{1 \leq j \leq \beta} (\|\delta Q\| \|e_+^j\| \|e_-^j\| + \|\delta Q\|^2 \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}})). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Puisque $\|\delta Q\| \ll 1$, il en résulte que

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z)| \leq e^{\frac{1}{h} \operatorname{Re} l^0(z)}, \quad \forall z \in \widetilde{W}(z_0). \quad (8.2)$$

Introduisons la fonction holomorphe

$$F_\delta(z, h) = e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z), \quad z \in \widetilde{W}(z_0). \quad (8.3)$$

Corollaire 8.1 *Soit z_0 un point de $\Omega \subset\subset \Lambda(p)$, et $\epsilon > 0$, Il existe un voisinage de z_0 noté $\widetilde{W}(z_0)$ inclus dans Ω et $C, \widetilde{C} > 0$ tel que si $\delta > 0$ est minoré par une puissance positive de h , et $\delta \ll h^{\rho+\epsilon+\frac{1}{4}}$, alors*
(a) avec une probabilité $\geq 1 - Ce^{-\frac{1}{C}(\ln h)^2}$ nous avons

$$\ln |F_\delta(z, h)| \leq \frac{1}{h} \operatorname{Re} l^0(z) \quad (8.4)$$

pour tous les z dans $\widetilde{W}(z_0)$.

(b) pour chaque z de $\widetilde{W}(z_0)$, $\epsilon > 1/2$ nous avons

$$\begin{aligned} \ln |F_\delta(z, h)| &\geq \frac{1}{h} (\operatorname{Re} l^0(z) - C \frac{\delta \ln(h^{-1})}{\sqrt{h}} - h\beta \ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})) \\ &\geq \frac{1}{h} (\operatorname{Re} l^0(z) - h(\widetilde{C} + \beta) \ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})) \end{aligned} \quad (8.5)$$

avec une probabilité $\geq 1 - Ch^{2\epsilon}$.

Preuve. Le passage à la ligne (8.5) résulte de l'hypothèse $\delta < h^{\rho+\epsilon+1/4} \leq h^{\rho+1/2} \leq h^{1+1/2}$. (a) découle de (8.2) et du corollaire 5.4, pour (b) il faut se référer à (7.17). \square

Nous pouvons maintenant répéter les arguments de [10, 11]. Rappelons une proposition de [10], qui reste valable pour des contours C^2 par morceaux (on a précisé au théorème 2.6 ce que l'on entendait par C^2 par morceaux). En effet, La même preuve permet d'avoir une frontière C^2 avec un nombre fini de points anguleux.

Proposition 8.2 *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, Γ un domaine à bord C^2 par morceaux et $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω vérifiant*

$$|f(z, h)| \leq e^{\phi(z)/h}, \quad z \in \Omega. \quad (8.6)$$

Supposons qu'il existe $\tilde{\epsilon} \ll 1$, $z_k \in \Omega$, $k \in J$ tels que

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in J} D(z_k, \sqrt{\tilde{\epsilon}}), \quad \#J = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}\right), \quad (8.7)$$

$$|f(z_k, h)| \geq e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k) - \tilde{\epsilon})}, \quad k \in J, \quad (8.8)$$

alors

$$\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} \iint_{\Gamma} \Delta\phi d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z) + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{h}\right).$$

Nous pouvons appliquer la proposition avec $\tilde{\epsilon} = h(\tilde{C} + \beta) \ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})$, $\phi = \operatorname{Re} l^0$ et $f = F_{\delta}$. (8.6) tient avec une probabilité comme dans (a) de 8.1, (8.8) tient avec une probabilité

$$\begin{aligned} &\geq 1 - Ch^{2\epsilon} (\#J) \\ &\geq 1 - \tilde{C} \frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})}}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Par ailleurs, si nous notons pour tout $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$,

$$m_{\Gamma}(x, \xi) := \#\{\sigma(p(x, \xi)) \cap \Gamma\}, \quad (8.10)$$

alors, compte tenu de la proposition 6.1, nous avons

$$\iint_{\Gamma} \Delta \operatorname{Re} l^0(z) d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z) = \iint m_{\Gamma} dx d\xi + \mathcal{O}(h).$$

Nous sommes maintenant en possession du résultat suivant ($\gamma_1 + \frac{1}{4} = \epsilon$, $\gamma_1 > 0$).

Théorème 8.3 *Soit z_0 un point de $\Omega \subset \subset \Lambda(p)$, et $N_0 \gg 1$. Il existe un voisinage $\widetilde{W}(z_0)$ de z_0 , tel que si Γ est un ouvert relativement compact dans $\widetilde{W}(z_0)$, à bord C^2 par morceaux, et $\gamma_1 > 0$, alors il existe $C > 0$ tel que si*

$$h^{N_0} < \delta \ll h^{\rho+\gamma_1+\frac{1}{2}}, \quad (8.11)$$

alors le spectre de $P - \delta Q_{\omega}$ est discret, et, le nombre $N(P - \delta Q_{\omega}, \Gamma)$ de valeurs propres de $P - \delta Q_{\omega}$ dans Γ satisfait

$$|N(P - \delta Q, \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint m_{\Gamma} dx d\xi| \leq C \frac{\sqrt{h \ln \frac{1}{h\delta}}}{h} \quad (8.12)$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C \frac{h^{2\gamma_1}}{\sqrt{\ln \frac{1}{h\delta}}}.$$

Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$. On peut donc énoncer, en recouvrant Γ par un nombre fini de $\Gamma_j \subset \widetilde{W}(z_j)$, le

Corollaire 8.4 *Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert de frontière C^2 par morceaux. Choisissons δ et γ_1 comme dans le théorème 8.3, alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C \frac{h^{2\gamma_1}}{\sqrt{\ln \frac{1}{h\delta}}},$$

nous avons (8.12).

Nous allons maintenant donner un résultat similaire concernant l'asymptotique de Weyl pour une famille de domaines. Rappelons d'abord la proposition suivante qui est le cas uniforme de la proposition 8.2.

Proposition 8.5 *Soit un domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, et \mathcal{G} une famille de domaines inclus dans Ω . Soit $C_0 > 0$ une constante indépendante de \mathcal{G} . On suppose que*

$$\forall \Gamma \in \mathcal{G}, \quad \partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \gamma_j([a_j, b_j]), \quad N \leq C_0, \quad (8.13)$$

où $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ est C^2 (γ_j dépend évidemment de Γ) avec

$$\forall j, \quad 0 < a_j < b_j \leq C_0, \quad (8.14)$$

$$\forall j, \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad (8.15)$$

$$\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1}), \quad j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \quad (8.16)$$

Soit $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z; h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (8.17)$$

Si on a un réseau quadratique de points $z_k \in \Omega$ de maille $\frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{2}$, $0 < \epsilon \ll 1$ avec

$$\Omega \subset \bigcup_{k \in J} D(z_k, \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{2}), \quad |J| \leq \frac{C}{\tilde{\epsilon}}$$

et

$$|f(z_k; h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k) - \tilde{\epsilon})}, \quad (8.18)$$

alors

$$\exists D > 0, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{G},$$

$$|\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint_{\Gamma} \Delta \phi \, d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)| \leq D \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{h}.$$

A la section 6.3 (“Preuve du Théorème 1.9”) de [11], M. Hager démontre la proposition 8.5 pour une famille différente de Γ . Ici pour la preuve, il suffit de suivre la démarche de Hager de la section 6.3 (du début de la démonstration à (6.16)) conjugué avec le lemme suivant :

Lemme 8.6 *Soit une famille de lacets simples γ_j ($j \in J$) dans \mathbb{C} de classe C^2 . On paramétrise les lacets $\gamma_j : [0, 1] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{C}$. De plus, supposons qu’il existe $C_0 > 0$ tel que*

$$\forall j \in J, \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}(t)| \leq C_0.$$

Si $z_i \in \mathbb{C}$ avec $d(z_i, \gamma_i) \leq r$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \ll 1/C_0^3$ chaque composante connexe de $\gamma_j \cap D(z_j, r)$ est de longueur $\leq Cr$ et cela pour tout $j \in J$.

Preuve. Posons $f_j(t) := \frac{1}{2}|\gamma_j(t) - z_j|^2$. Un calcul montre (en omettant les indices) que

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \langle \gamma(t) - z, \dot{\gamma}(t) \rangle, \\ \ddot{f}(t) &= |\dot{\gamma}(t)|^2 + \langle \gamma(t) - z, \ddot{\gamma}(t) \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 .

Pour la suite nous travaillons dans $D(z, r)$, c’est à dire que nos t vérifient $\gamma(t) \in D(z, r)$.

Grâce à l’inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèses, il existe $C_1 > 0$ tel que pour $r \ll 1/C_0^3$

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &\geq |\dot{\gamma}(t)|^2 - |\gamma(t) - z| |\ddot{\gamma}(t)| \\ &\geq \frac{1}{C_0^2} - rC_0 \geq \frac{1}{C_1} > 0. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Dans chaque composante connexe de $\gamma \cap D(z, r)$, il existe un temps t_1 pour lequel $f(t)$ est minimum, dès lors $\dot{f}(t_1) = 0$. La formule de Taylor avec reste intégrale donne alors

$$f(t) = f(t_1) + \int_{t_1}^t (x - t_1) \ddot{f}(x) dx$$

de là

$$f(t) \geq f(t_1) + \frac{1}{2C_1}(t - t_1)^2.$$

soit

$$|t - t_1| \leq r\sqrt{2C_1}.$$

Ainsi la longueur de chaque composante connexe de $\gamma \cap D(z, r)$ est majorée par

$$\int_{|t| \leq r\sqrt{2C_1}} |\dot{\gamma}(t)| dt \leq r\sqrt{8C_1C_0^2}.$$

(Toutes les estimations sont bien sûr uniformes par rapport à j) □

La proposition 8.5 nous conduit donc au résultat qui suit :

Théorème 8.7 *Soit \mathcal{G} une famille de domaines $\Gamma \subset \subset \Omega$, vérifiant les hypothèses du théorème 8.5. Nous supposons que l'hypothèse 2.6 est satisfaite. Choisissons $\epsilon - \frac{1}{2} = \gamma_2 > 0$ (ϵ a été introduit au corollaire 8.1), et $\delta \ll h^{\rho + \gamma_2 + \frac{3}{4}}$ et minoré par une puissance de h , alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C \frac{h^{2\gamma_2}}{\ln \frac{1}{h\delta}},$$

nous avons (8.12) avec une constante C indépendante de Γ .

9 Réduction semiclassique

On s'intéresse ici à la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_\omega$. On rappelle que P et Q_ω s'écrivent respectivement

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

où les entrées de Q_α sont des séries de Fourier aléatoires. Q_α satisfait l'hypothèse 2.4 et P est elliptique au sens classique. Nous allons pour commencer restreindre le paramètre spectral z au domaine Ω_R , où $\Omega_R = R\Omega_1$, $R \gg 1$, avec $\Omega_1 \Subset \Omega \subset \Lambda(p_m)$. Puisque $\Lambda(p_m), \Omega$ sont des cônes, nous avons pour tout $R \geq 1$, $\Omega_R \Subset \Omega \subset \Lambda(p_m)$.

Pour $z \in \Omega_R$, nous ramenons l'étude de $P - z$ à un problème semiclassique en divisant par R . Nous sommes donc invités à étudier, en posant $h^m R = 1$, l'opérateur

$$P^0 - w - \tilde{Q}_\omega = h^m(P - z - Q_\omega), \quad w := \frac{z}{R} \in \Omega_1. \quad (9.1)$$

Le symbole principal semiclassique de P^0 est alors p_m . Nous avons

$$\tilde{Q}_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} h^{m-\alpha} Q_\alpha(x) (hD_x)^\alpha, \quad \tilde{Q}_\omega := h^{m-\alpha_1} \tilde{Q}_\omega^0. \quad (9.2)$$

On reprend les notations δ et $\Lambda(p_m)$ introduit dans le cadre semiclassique. P^0 satisfait l'hypothèse d'ellipticité 2.1, et par hypothèse les points $\rho_{\pm} \in p_m^{-1}(w)$, $w \in \Omega_1$ vérifient la condition 2.3. De plus, la perturbation \tilde{Q}_{ω}^0 entre bien dans le cadre de 2.4. Dans ces conditions, on peut appliquer le corollaire 8.4 et le théorème 8.7, à $P^0 - \delta\tilde{Q}_0$, avec $\delta = h^{m-\alpha_1}$. La condition (8.11) équivaut ici à

$$m - \alpha_1 > \rho + \gamma_1 + \frac{1}{2} \quad (9.3)$$

et dans le cas d'une famille de domaines $m - \alpha_1 > \rho + \gamma_2 + \frac{3}{4}$.

Notons pour tout $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$,

$$m_{\Gamma} := \#\{\sigma(p_m(x, \xi)) \cap \Gamma\}. \quad (9.4)$$

Nous avons les égalités suivantes :

$$N(P^0 - \delta\tilde{Q}_{\omega}^0, \Gamma) = N(P - Q_{\omega}, R\Gamma) \quad (9.5)$$

$$\frac{1}{2\pi h} \iint m_{\Gamma} dx d\xi = \frac{1}{2\pi} \iint m_{R\Gamma} dx d\xi, \quad (9.6)$$

Ce qui implique qu'avec une probabilité $\geq 1 - CR^{-2\gamma_1/m}(\sqrt{\ln R})^{-1}$ nous avons

$$|N(P - Q_{\omega}, R\Gamma) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{R\Gamma} dx d\xi| \leq CR^{1/(2m)}\sqrt{\ln R} \quad (9.7)$$

Si \mathcal{G} une famille de domaines $\Gamma \subset\subset \Omega_1$, vérifiant les hypothèses du théorème 8.5, alors avec une probabilité $\geq 1 - CR^{-2\gamma_2/m}(\sqrt{\ln R})^{-1}$ nous avons (9.7) avec une constante $C > 0$ indépendante de Γ .

10 Preuve du Théorème 2.8

Nous nous intéressons maintenant à la distribution des valeurs propres dans les dilatés d'un profil conique de la forme $\Gamma(0, g) \subset\subset \Omega$, $\Gamma_{\theta_1, \theta_2}(g, h)$ a été introduit en (2.24). On peut supposer sans perte de généralité que $\inf_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} g(\theta) = 1$.

On découpe suivant un découpage dyadique $\Gamma(0, \lambda g)$ pour de grandes valeurs de λ . Introduisons k_0 l'entier pour lequel $2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$. On trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(0, \lambda g) &= \Gamma(0, 1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Gamma(2^k, 2^{k+1}) \right) \cup \Gamma(2^{k_0}, \lambda g) \\ &= \Gamma(0, 1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} 2^k \Gamma(1, 2) \right) \cup 2^{k_0} \Gamma(1, \lambda g / 2^{k_0}). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Lemme 10.1 *Supposons $m - \alpha_1 - \rho - 3/4 > 0$. Il existe alors $C > 0$ tel que quelque soit $\tilde{\epsilon} > 0$, il existe $k(\tilde{\epsilon}) \in \mathbb{N}$ tel que avec une probabilité $\geq 1 - \tilde{\epsilon}$, on ait*

$$\begin{aligned} \forall \lambda \geq 2^{k(\tilde{\epsilon})}, \\ |N(P - Q_\omega, \Gamma(2^{k(\tilde{\epsilon})}, \lambda g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\Gamma(2^{k(\tilde{\epsilon})}, \lambda g)} dx d\xi| \leq C \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Preuve. Nous tirons de la section précédente : avec une probabilité $\geq 1 - Ck^{-\frac{1}{2}}2^{-2\frac{k\gamma_1}{m}}$ nous avons

$$|N(P - Q_\omega, \Gamma(2^k, 2^{k+1})) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\Gamma(2^k, 2^{k+1})} dx d\xi| \leq C 2^{k/(2m)} \sqrt{k} \quad (10.3)$$

Similairement, avec une probabilité $\geq 1 - Ck_0^{-\frac{1}{2}}2^{-2\frac{k_0\gamma_2}{m}}$ nous avons pour tout $2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$,

$$|N(P - Q_\omega, \Gamma(2^{k_0}, \lambda g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\Gamma(2^{k_0}, \lambda g)} dx d\xi| \leq C 2^{k_0/(2m)} \sqrt{k_0} \quad (10.4)$$

(la famille de domaines $\Gamma(1, \lambda g/2^{k_0})$ indexée sur λ entre bien dans le cadre du théorème 8.7.).

Soit A_k l'évènement (10.3) et B_{k_0} l'évènement (10.4). Pour tout γ_1, γ_2 dans $(0, m - \alpha_1 - \rho - 3/4)$, Nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbb{C}A_k) + \mathbb{P}(\mathbb{C}B_k) = C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}} (2^{-2\frac{k\gamma_1}{m}} + 2^{-2\frac{k\gamma_2}{m}}) < +\infty. \quad (10.5)$$

Puisque la somme est finie, il existe $k(\tilde{\epsilon}) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} \mathbb{C}A_k \cup \mathbb{C}B_k\right) \leq \sum_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbb{C}A_k) + \mathbb{P}(\mathbb{C}B_k) < \tilde{\epsilon},$$

impliquant

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} (A_k \cap B_k)\right) \geq 1 - \tilde{\epsilon}.$$

Utilisant le fait que

$$\sum_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{k_0} 2^{\frac{k}{2m}} \sqrt{\ln 2^k} = \mathcal{O}(1) \lambda^{\frac{1}{2m}} \sqrt{\ln \lambda},$$

on conclut qu'avec une probabilité $> 1 - \tilde{\epsilon}$ nous avons (10.2). \square

Théorème 10.2 *Supposons $m_1 > 0$. Il existe $C_1 > 0$ tel que $\forall \epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \subset \mathcal{M}$ tel que $\mathbb{P}(M_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ et $\forall \omega \in M_\epsilon$, il existe $C(\epsilon, \omega) < \infty$ tel que l'on ait*

$$\forall \lambda \geq 0,$$

$$|N(P - Q_\omega, \lambda \Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda \Gamma(0, g)}| \leq C(\epsilon, \omega) + C_1 \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}.$$

Finalement, en prenant $\widetilde{M} = \bigcup_\epsilon M_\epsilon$, nous avons $\mathbb{P}(\widetilde{M}) = 1$ et le

Corollaire 10.3 *Supposons $m_1 > 0$. Il existe $C_1 > 0$ et $\widetilde{M} \subset \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(\widetilde{M}) = 1$ tels que $\forall \omega \in \widetilde{M}$ on ait*

$$\forall \lambda \geq 0,$$

$$|N(PQ_\omega, \lambda \Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda \Gamma(0, g)}| \leq C(\omega) + C_1 \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}.$$

Remarque 10.4 La somme (10.3) est finie, c'est la condition nécessaire pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli, rappelé ici

$$\sum_n \mathbb{P}(\mathfrak{C}A_n) < \infty \Rightarrow \liminf A_n = 1,$$

où

$$\omega \in \liminf A_n \iff \exists n(\omega) \in \mathbb{N}, \forall k \geq n(\omega), \omega \in A_k.$$

Le lemme 10.1 et le théorème 10.2 n'est autre qu'une redémonstration du lemme de Borel-Cantelli appliqué aux événements A_k et B_k .

Références

- [1] J. Bolte, R. Glaser, *A semiclassical Egorov theorem an quantum ergodicity for matrix valued operators* Comm. Math. Phys. 247 (2004), 391-419.
- [2] W. Bordeaux Montrieux, *Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints*, thèse Ecole Polytechnique, 2008.
- [3] E.B. Davies, *Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators*, Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41.
- [4] N. Dencker, *The pseudospectrum of systems of semiclassical operators*, <http://arxiv.org/abs/0705.4561>

- [5] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, *Pseudosepctra of semiclassical (pseudo-) differential operators*, Comm. Pure Appl. math. 57 (2004), 384-415.
- [6] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, LMS LN 268, Cambrigde University Press (1999).
- [7] L.C. Evans, M. Zwoski, *Lectures on semiclassical analysis, version 0.3*, <http://math.berkeley.edu/zworski>
- [8] M. Federiouk *Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires*, Mir, Moscou, 1987.
- [9] I.C. Gohberg M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, A.M.S. Providence, 1969.
- [10] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoint I : un modèle*, Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse Sér. 6, 15 no. 2 (2006), p. 243-280.
- [11] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoint II*, Ann. Henri Poincaré, 2006, vol 7, n°6, 1035-1064.
- [12] M. Hager, J. Sjöstrand, *Eigenvalue asymptotics for randomly perturbed non-selfadjoint operators*, Mathematische Annalen, Springer, vol. 342, no.1, pp. 177-243.
- [13] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II, Comportement semi-classique près d'un rationnel*, Mémoires de la Société Mathématique de France Sér. 2, 40 (1990), p. 1-139.
- [14] J.P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge University Press, 1985.
- [15] K. Pravda Starov, *Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non-autoadjoints*, Thèse Rennes 2006, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00109895>
- [16] A. Melin, J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex-valued phase functions*, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations, Lecture Notes, Springer, n° 459, 120-223.
- [17] J. Sjöstrand, *Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators with small multiplicative random perturbations*, à paraître dans Ann. Fac Sci Toulouse.
<http://arxiv.org/pdf/0802.3584>
- [18] J. Sjöstrand, *Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators on compact manifolds with small multiplicative random perturbations*,
<http://arxiv.org/pdf/0809.4182>

- [19] M. Taylor, *Reflexion of singularities of solutions to systems of differential equations*, CPAM, Vol.28, p.457-478, (1975).
- [20] L.N. Trefethen, M. Embree, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press (2005).
- [21] M. Zworski, *A remark on a paper of E.B Davies*, Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957.
- [22] M. Zworski, *Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations*, Comm. Math. Phys. 229 (2002), 293-307.